КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АЛЬ-ФАРАБИ

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ТЕПЛОФИЗИКИ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

3D моделирование физических процессов

Алгоритм решения

Лектор: PhD
Максимов Валерий Юрьевич

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ
РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА ПРОГОНКИ

Полученное уравнение (16) представляет собой неявную конечно-разностную схему и может быть решено аналитически с помощью метода трехточечной прогонки. Уравнение (16) представим в следующем виде:

$$A_j \hat{O}_{i+1,j-1} + B_j \hat{O}_{i+1,j} + C_j \hat{O}_{i+1,j+1} = D_j \qquad (17)$$

Для этого умножим все члены уравнения (16) на $\dfrac{(\psi_E - \psi_I)_i}{\Delta x}$

$$\frac{(\psi_E - \psi_I)_i}{\Delta x}\Delta\omega\left(\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i,j}\right) + \frac{1}{2}\upsilon_{i,j+\frac{1}{2}}\left(\Phi_{i+1,j} + \Phi_{i+1,j+1}\right) - \frac{1}{2}\upsilon_{i,j-\frac{1}{2}}\left(\Phi_{i+1,j} + \Phi_{i+1,j-1}\right) +$$

$$+\left[(\psi_E - \psi_I)_{i+1} - (\psi_E - \psi_I)_i\right]\Phi_{i+1,j}\frac{\Delta\omega}{\Delta x} = T_{i,j+\frac{1}{2}}\left(\Phi_{i+1,j+1} - \Phi_{i+1,j}\right) - T_{i,j-\frac{1}{2}}\left(\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i+1,j-1}\right) + d_{i,j}\Delta\omega(\psi_E - \psi_I)_i$$

Приведем подобные:

$$\left(-T_{i,j-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\upsilon_{i,j-\frac{1}{2}}\right)\Phi_{i+1,j-1}+\left(T_{i,j-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\upsilon_{i,j-\frac{1}{2}}+T_{i,j+\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\upsilon_{i,j+\frac{1}{2}}\right)+\frac{\Delta\omega}{\Delta x}\left(\left(\psi_E-\psi_I\right)_{i+1}\right)\Phi_{i+1,j}+$$

$$+\left(-T_{i,j+\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\upsilon_{i,j+\frac{1}{2}}\right)\Phi_{i+1,j+1}=\frac{\Delta\omega}{\Delta x}\left(\psi_E-\psi_I\right)_i\left(\Phi_{i,j}+d_{i,j}\Delta x\right)$$

Введем следующие обозначения:

$$A_j = -\left(\frac{1}{2}\upsilon_{i,j-\frac{1}{2}} + T_{i,j-\frac{1}{2}}\right) \quad (18)$$

$$C_j = \frac{1}{2}\upsilon_{i,j+\frac{1}{2}} - T_{i,j+\frac{1}{2}} \quad (19)$$

$$B_j = T_{i,j-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\upsilon_{i,j-\frac{1}{2}} + T_{i,j+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\upsilon_{i,j+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta\omega}{\Delta x}\left(\psi_E - \psi_I\right)_{i+1} \quad (20)$$

$$D_j = \frac{\Delta\omega}{\Delta x}\left(\psi_E - \psi_I\right)_i\left(u_{i,j} + d_{i,j}\Delta x\right) \quad (21)$$

Вообще говоря, коэффициенты A_j, B_j, C_j, D_j являются известными функциями, однако в формулу (20) для коэффициента B_j входит неизвестное значение

$$\left(\psi_E - \psi_I\right)_{i+1}$$

которое определим путем разложения в ряд Тейлора:

$$\left(\psi_E - \psi_I\right)_{i+1} = \left(\psi_E - \psi_I\right)_i + \left.\frac{\partial\left(\psi_E - \psi_I\right)}{\partial x}\right|_i \Delta x = \left(\psi_E - \psi_I\right)_i - \left(\upsilon_E - \upsilon_I\right)_i \Delta x$$

Подставив полученное выражение в (20) и сделав несложные преобразования, получим:

$$B_j = -A_j - C_j + \frac{\Delta\omega}{\Delta x}\left(\psi_E - \psi_I\right)_i \qquad (22)$$

Таким образом, поскольку известны выражения для коэффициентов уравнения (17), можно считать, что уравнение (16) приведено к виду (17).

Используя далее известный метод трехточечной прогонки, можно получить искомое решение.

Описанная неявная конечно-разностная схема гарантирует устойчивый счет даже при больших шагах интегрирования, однако, размер шага Δx_i может влиять на точность и сходимость решения.